

《义务教育数学课程标准（2022年版）》（初中部分）解读

（本文以“从七大变化把握数学改革要义——以《义务教育数学课程标准（2022年版）》初中部分为例”为题，发表在《基础教育课程》2022年第10期（上），12-20）

摘要：本文从以下七个方面概括了《义务教育数学课程标准（2022年版）》的特点：厘清数学核心素养与“四基”“四能”的关系；强调数学知识与核心素养的整体性、一致性和阶段性；在数与代数领域增加代数推理，补齐逻辑推理短板；在图形与几何领域把尺规作图作为数学探究手段，加强几何直观；在统计与概率领域增加数据分组，适应大数据时代的要求；在综合与实践领域强调跨学科主题式学习，促进育人方式和学习方式的变革；细化评价与考试命题建议，注重实现教、学、考的一致性。

关键词：数学核心素养；代数推理；尺规作图；数据分组；跨学科主题式学习

义务教育数学课程标准修订始于2019年，至2022年4月正式公布《义务教育数学课程标准（2022年版）》（以下简称《数学课标（2022年版）》），历时3年。《数学课标（2022年版）》从课程性质、课程理念、课程内容、课程评价、课程实施等方面擘画了未来10年我国义务教育数学课程的蓝图。概括地说，它有如下特点：

一、厘清数学核心素养与“四基”“四能”的关系

《数学课标（2022年版）》提出了“三会”（即数学核心素养）的课程总目标，具体包括“四基”“四能”和情感态度价值观三个维度。厘清“三会”与“四基”“四能”的关系是《数学课标（2022年版）》关注的重点。

（一）数学核心素养（“三会”）与“四基”“四能”的关系

数学核心素养即“三会”，具体包括“四基”“四能”和情感态度价值观三个维度。“三会”“四基”“四能”和情感态度价值观都是通过数学活动获得的。

“四基”是培养学生数学核心素养的沃土，它从数学知识、技能、思想、方法四个维度为数学核心素养的培养提供支撑。学生在数学活动过程中，掌握基础知识和基本技能，获得基本思想方法，积累基本活动经验，最终达到“三会”。“四能”是落实过程性目标、促进学生数学思考、发展学生数学核心素养的有效载体，它在发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程中促进了数学核心素养的孕育、养成和发展。学生通过数学活动，在提高发现问题和提出问题能力的同时，学会用数学的眼光观察现实世界；在提高分析问题能力的

同时，学会用数学的思维思考现实世界；在提高解决问题能力的同时，学会用数学的语言表达现实世界。“四基”“四能”是发展学生核心素养的有效载体，核心素养对“四基”“四能”提出了更高要求。^[1]“情感态度价值观”是体现数学学科育人价值的重要指标，它是培养学生数学核心素养的“动力系统”，与“四基”“四能”相互支撑，共同导向数学核心素养，为学生的终身学习与发展奠定基础。

（二）数学核心素养在不同学段表现出不同水平

数学核心素养具有高度的整体性、一致性和发展性，它是通过数学活动逐步形成与发展的正确价值观、思维品质与关键能力。数学核心素养在不同学段的表现，既有一致性，也有一个发展的过程。学生在小学阶段、初中阶段和高中阶段的认知发展具有明显的阶段特征，与之对应的数学课程要求也存在差异，因此，如表 1 所示，数学核心素养的表现分为不同的层次（不包含各学段共有的应用意识和创新意识）。

表 1 数学核心素养在不同学段的表现

学段	高中	初中	小学
数学眼光	数学抽象 直观想象	抽象能力 空间观念 几何直观	数感 量感 符号意识 空间观念 几何直观
数学思维	逻辑推理 数学运算	推理能力 运算能力	推理意识 运算能力
数学语言	数学建模 数据分析	模型观念 数据观念	模型意识 数据意识

小学阶段的表现侧重于意识，主要是指基于经验的感悟，形成初步的意识；初中阶段的表现上升为观念，主要是指基于概念的理解，形成相对明确的观念；高中阶段的表现主要是具有数学特征的思维品质和关键能力，侧重于数学抽象、推理与建模的能力。数学意识是一种基于经验的感悟（感性认识）；数学观念是一种基于概念的理解（理性认识）；关键能力是一种基于问题解决的稳定的心理特征。数学核心素养在不同阶段的要求与水平有所差异，但在数学本质上是一致的。例如，小学“数感、量感、符号意识”，初中“抽象能力”，高中“数学抽象”，本质上都是一种从各种事物中抽象出数量关系与空间形式的过程。数学核心素养在不同数学领域中的表现有不同的形式，但在心理特征上是一致的，例如几何推理与代数推理。

如表 2 所示，《数学课标（2022 年版）》区分和明确了小学和初中两个学段的不同要求。例如把“数感”“符号意识”作为小学阶段的要求，并在小学阶段新增“量感”作为

数学核心素养的主要表现之一。而 2011 版课标的十个“核心概念”是整个义务教育阶段的要求，对小学和初中两个学段未做区分。^[2]《数学课标（2022 年版）》以核心素养为主线构建了“学业质量标准”，使得核心素养成为学业评价与考试命题的依据。

表 2 2022 版课标中核心素养的“主要表现”与 2011 版课标中的“核心概念”的联系与区别

2011 年版		数感		符号意识	运算能力	空间观念	几何直观	推理能力	数据分析观念	模型思想	应用意识	创新意识
2022 年版	小学	数感	量感	符号意识	运算能力	空间观念	几何直观	推理意识	数据意识	模型意识	应用意识	创新意识
	初中	抽象能力			运算能力	空间观念	几何直观	推理能力	数据观念	模型观念	应用意识	创新意识

二、强调数学知识与核心素养的整体性、一致性和阶段性

数学知识是一个整体，数学教学必须进行整体性教学设计，数学学习应该遵循学生的认知规律，螺旋式上升。数学核心素养也是一个整体，它的培育也必须分阶段逐步实施。《数学课标（2022 年版）》要求把数学知识体系和核心素养的培育融合起来。

（一）整体把握数学知识体系和核心素养结构

应改变过于注重以课时为单位的教学设计，推进单元整体教学设计，体现数学知识之间的内在逻辑关系，以及学习内容与核心素养表现的关联。整体分析数学内容本质和学生认知规律，合理整合教学内容，分析主题—单元—课时的数学知识和核心素养主要表现，确定单元教学目标，并落实到教学活动各个环节，整体设计，分步实施，促进学生对数学教学内容的整体理解和把握，逐步培养学生的核心素养。在教学中要重视对教学内容的整体分析，帮助学生建立能体现数学学科本质、对未来学习有支撑意义的结构化的数学知识体系。通过合适的主题整合教学内容，帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯，发展核心素养。^[3]

（二）把握数学知识进阶、核心素养进阶的阶段性实施

每一个特定的学习内容都具有培养相关核心素养的作用，要注重建立具体内容与核心素

养主要表现的关联，在制订教学目标时将核心素养的主要表现体现在教学要求中。要依据核心素养的内涵和不同学段的主要表现，结合具体的教学内容，全面分析主题、单元和课时的特征，基于主题、单元整体设计教学目标，围绕单元目标细化具体课时的教学目标。充分发挥核心素养导向的教学目标对教学过程的指导作用，在实现知识进阶的同时，体现核心素养的进阶。^[4]构建内容结构既要关注数学内容之间的逻辑联系，又要关注核心素养整体性培养的要求；内容组织不仅要关注数学内容的主线，也要关注核心素养培养的一致性；准确把握每个学段每个主题的内容要求和学业要求，遵循螺旋上升原则，使学生对数学知识的理解不断深入，体现核心素养发展的阶段性。要根据数与代数、图形与几何、统计与概率领域的内容主线，以及综合与实践领域中的学习主题，挖掘教学内容中的核心素养要素，明晰数学核心素养在具体内容体系中的表现和发展水平，把握该部分内容中需要重点关注的数学核心素养，使数学学习内容与核心素养的培育紧密地融合在一起。表 3 体现了图形与几何领域教学内容与核心素养的阶段性实施。

表 3 图形与几何领域核心素养发展的阶段性实施

学段	教学内容要求	核心素养发展水平	
第一学段 (1~2 年级)	直观辨认和感知立体图形和平面图形	形成初步的空间观念	数学核心素养的表现侧重于意识，主要是基于经验的感悟
第二学段 (3~4 年级)	认识几何图形并对其进行逐步抽象	形成空间观念和初步的几何直观	
第三学段 (5~6 年级)	在对图形测量和计算的过程中，从度量的角度加深对图形的认识及其关系的理解	进一步增强几何直观和空间观念	
第四学段 (7~9 年级)	在对图形性质的研究过程中，核心素养的感悟由感性上升为理性	在建立空间观念、几何直观的基础上，逐步形成推理能力	

三、在数与代数领域增加代数推理，补齐逻辑推理短板

(一) 数与代数领域内容标准的变化

数与代数领域内容标准的变化如表 4 所示。在 2011 年版数学课标的初中图形与几何领域有推理或证明的内容，但在数与代数领域没有推理或证明的内容，这让学生误以为只有几何才需要推理。为此，《数学课标（2022 年版）》明确强调代数推理。

表 4 数与代数领域内容标准的变化

教学要求变化	(1) 把小学负数、方程、反比例内容移到初中； (2) 把“了解一元二次方程的根与系数的关系”从选修调整为必修
	(1) 理解负数的意义； (2) 知道实数由有理数和无理数组成；

增加内容	(3) 能用数轴上的点表示实数，能比较实数的大小； (4) 能借助数轴理解相反数和绝对值的意义； (5) 能利用乘法公式进行简单的推理； (6) 了解代数推理； (7) 理解函数值的意义； (8) 知道二次函数系数与图象形状和对称轴的关系； (9) 会求二次函数的最大值或最小值，并能确定相应自变量的值，能解决相应的实际问题； (10) 知道二次函数和一元二次方程之间的关系
删除内容	(1) 知道 $ a $ 的含义（这里 a 表示有理数）； (2) 知道给定不共线三点的坐标可以确定一个二次函数； (3) 结合实例进一步体会用有序数对可以表示物体的位置

(二) 代数推理的基本类型

1. 基于运算的代数推理

例 1 如果一个三位数的个位、十位、百位的数字之和能够被 3 整除，那么这个数可以被 3 整除。

证明：设 \overline{abc} 是一个三位数， $\overline{abc} = 100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c)$ ，显然 $(99a + 9b)$ 能被 3 整除，因此，如果 $a + b + c$ 可以被 3 整除，那么 \overline{abc} 能被 3 整除。

为了在运算的基础上构建代数推理体系，对代数概念可以给出基于运算的定义。例如，对相反数，可以给出如下基于运算的定义：若 $a + b = 0$ ，则称 a 、 b 互为相反数。

2. 基于几何直观的代数推理

例 2 如图 1，小明家、食堂、图书馆在同一直线上。小明从家去食堂吃早餐，接着去图书馆读报，然后回家。其中 x 表示时间， y 表示小明离家的距离。

根据图象回答下列问题：

- (1) 食堂离小明家 _____ km，小明从家到食堂用了 _____ min。
- (2) 小明在食堂吃早餐用了 _____ min。
- (3) 食堂离图书馆 _____ km，小明从食堂到图书馆用了 _____ min。
- (4) 图书馆离小明家 _____ km。小明从图书馆回家的平均速度是 _____。

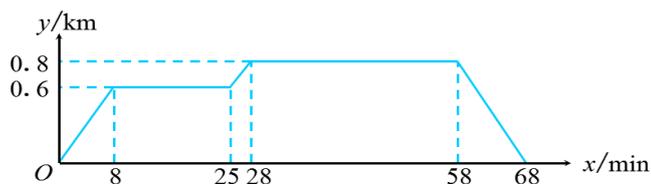


图 1

四、在图形与几何领域把尺规作图作为数学探究手段，加强几何直观

（一）图形与几何领域内容标准的变化

图形与几何领域内容标准的变化如表 5 所示。《数学课标（2022 年版）》在图形与几何领域把尺规作图从初中前置到小学，不仅可以使它成为学习与理解几何的工具，而且有助于创设不同水平的“数学探究”活动。

表 5 图形与几何领域内容标准的变化

教学要求变化	(1) 把尺规作图从初中前置到小学； (2) 把“探索并证明垂径定理：垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧”从选修调整为必修
增加内容	(1) 能用尺规作图：过直线外一点作这条直线的平行线； (2) 理解角平分线的概念； (3) *能用尺规作图：过圆外一点作圆的切线； (4) 知道同弧（或等弧）所对的圆周角相等
删除内容	探索切线与过切点的半径的关系，会用三角尺过圆上一点画圆的切线

（二）对五种基本作图的处理

对尺规作图的教学，不能仅要求学生记住作图步骤，会按步骤操作，而应“教思维”——以尺规作图为载体，提高学生的思维水平。《数学课标（2022 年版）》把“作一条线段等于已知线段”前置到第二学段，分两步作出给定长度的线段。^[5]其他四种基本作图仍然安排在第四学段。可以根据角的大小的比较方法得出“作一个角等于已知角”的方法。

由于角和线段都是轴对称图形，所以可以根据轴对称性质分别得出作角平分线和作线段垂直平分线的方法。如果先探索作角平分线的方法，那么可由此得出过直线上一点作已知直线垂线的方法（即作平角的角平分线），从而可以得出作线段垂直平分线的方法，最后可得出过直线外一点作已知直线垂线的方法。如果先探索作线段垂直平分线的方法，那么可由此得出过一点作已知直线垂线的方法，而作角平分线可转化为作线段的垂直平分线。

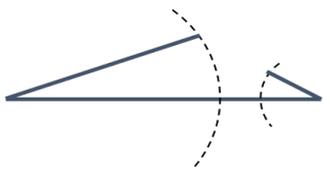
（三）把尺规作图作为数学探究手段，加强几何直观

几何作图是将“想象”的几何概念“构造”（存在性）出来的基本途径，有助于对几何概念及其关系的直观理解，形成初步的几何直觉。在 2011 年版数学课标中，由于尺规作图安排的位置较靠后，影响了早期的直观运用。《数学课标（2022 年版）》在几何的入门阶段，把尺规作图的教学在直观的层面上展开，主要目的是让学生经历概念（图形）的“构造”，形成直观的理解。尺规作图是帮助学生从感性到理性，从直观操作到逻辑推理，并建立几何直觉的有效工具，因此，在几何概念的形成与发展过程中应尽可能地多给学生尺规作图的机会。应该把尺规作图作为合情推理的手段，用尺规作图去发现结论，然后用演绎推理证明结论。

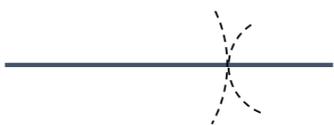
例 3 用尺规作图探索三角形三边的关系。

问题：我们知道，三角形是由三条线段构成的，那么，给你三条线段，你能够用直尺和圆规作出一个三角形吗？

(1) $a=1$, $b=8$, $c=10$ 。



(2) $a=2$, $b=8$, $c=10$ 。



(3) $a=3$, $b=8$, $c=10$ 。



发现结论：三角形的任何两边的和大于第三边。

证明结论：根据“两点之间线段最短”可证。

五、在统计与概率领域增加数据分组，适应大数据时代的要求

统计与概率领域内容标准的变化如表 6 所示。《数学课标（2022 年版）》增加计算加权平均数的分布式计算方法，以及按照组内离差平方和最小的原则对数据进行分类的方法，都是为了适应大数据时代的要求。

表 6 统计与概率领域内容标准变化

教学要求变化	(1) 感知大数据的时代特征； (2) 设计跨学科的项目式学习课程
增加内容	(1) 理解中位数、众数的意义； (2) 知道计算加权平均数的分布式计算方法； (3) 会计算一组数据的离差平方和； (4) 经历对数据进行分类的活动，知道按照组内离差平方和最小的原则对数据进行分类的方法； (5) 会计算四分位数，了解四分位数与箱线图的关系，感悟百分位数的意义

在大数据分析中，数据的分组是重要的方法之一。虽然可以有各种方法对数据进行分组，但是，使得“组内离差平方和达到最小”的方法是最传统的，也是非常合理的。^[6]

四分位数是指在统计学中把所有数值由小到大排列并分成四等份，处于三个分割点位置的数值。四分位数是通过 3 个点将全部数据等分为 4 部分，其中每部分包含 25% 的数据。如

果把一组数据从小到大排序，用 m_{50} 表示中位数，称为 50% 的百分位数，那么中位数把这组数据分为两部分，分别记为 S 和 T；进一步，用 m_{25} 和 m_{75} 分别表示 S 和 T 的中位数，那么，所有数据中小于或等于 m_{25} 的占 25%、小于或等于 m_{75} 的占 75%。这样， m_{25} 、 m_{50} 、 m_{75} 这三个数值把所有数据分为个数相等的四个部分，因此称为四分位数。与中位数的计算方法类似，计算四分位数时，首先对数据进行排序，然后确定四分位数所在的位置，该位置上的数值就是四分位数。

四分位数在统计学中的箱线图绘制方面应用很广泛。如图 2 所示，所谓箱线图就是由一组数据的 5 个特征值，即数据的最大值、最小值、中位数 m_{50} 和两个四分位数 m_{25} 、 m_{75} ，绘制的一个箱子和两条线段的图形，这种直观的箱线图不仅能反映出一组数据的分布特征，而且还可以进行多组数据的分析比较。^[7]

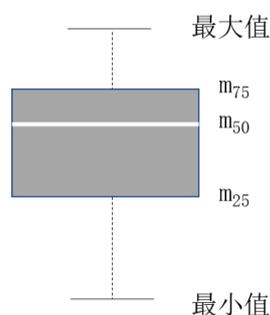


图 2 箱线图

六、在综合与实践领域强调跨学科主题式学习，促进育人方式和学习方式的变革

综合与实践领域强调跨学科主题式学习，初中阶段跨学科主题式学习的教学要求如表 7 所示。

表 7 跨学科主题式学习的教学要求

学习形式及目标	可以项目式学习的方式，以问题解决为导向，整合数学与其他学科的知识 and 思想方法，让学生从数学的角度观察与分析、思考与表达、解决与阐释社会生活以及科学技术中遇到的现实问题，感受数学与科学、技术、经济、金融、地理、艺术等学科领域的融合，积累数学活动经验，体会数学的科学价值，提高发现与提出问题、分析与解决问题的能力，发展应用意识、创新意识和实践能力 ^[8]
呈现形式	(1) 明确所需的数学知识与技能； (2) 提出相应的学习任务； (3) 确定学习活动的形式； (4) 明确学习成果的形式和要求等
跨学科方式	既包括数学内部的跨不同学习领域，也包括从数学跨向数学以外的广阔学科领域
学习评价内容	学生对真实情境中问题的理解，用数学语言表达问题的适切性，结果预测的合理性，关注解决问题的实施方案，解决问题过程中的思

	考、交流与创意表现；项目研究成果的质量 ^[9]
--	------------------------------------

如图 3，可以通过“‘比’的应用”这一项目式学习，让学生感受数学与社会生活、人文艺术和科学技术的融合。活动前，教师应参考学生的个人经验和已有的知识积累等设计一个包含若干子主题的完整可行的活动方案。

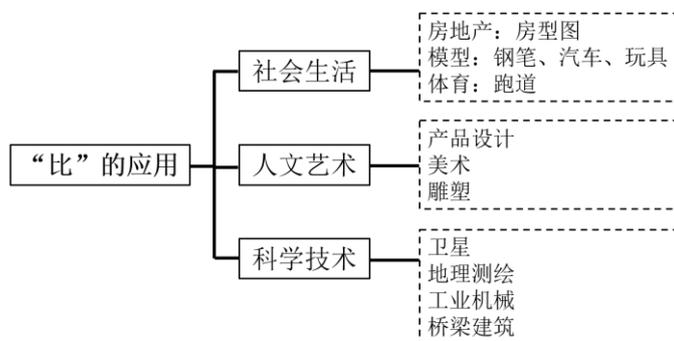


图 3

七、细化评价与考试命题建议，注重实现教、学、考的一致性

《数学课标（2022 年版）》给出了学业质量标准，从“四基”“四能”及情感态度价值观三个维度来评估学生核心素养达成和发展情况，明确“学到什么程度”，引导和帮助教师把握教学深度与广度，为教材编写、教学实施、考试评价等提供依据。内容标准从“内容要求”“学业要求”和“教学提示”三方面呈现，不仅明确了“教什么”“教到什么程度”，而且强化了“怎么教”的具体指导。“内容要求”主要描述学习的范围和要求；“学业要求”主要明确学段结束时学习内容与相关核心素养所要达到的程度；“教学提示”主要是针对学习内容和达成相关核心素养而提出的教学建议。可按如图 4 所示的结构理解《数学课标（2022 年版）》的主要内容，从中可以看出它注重实现教、学、考的一致性。

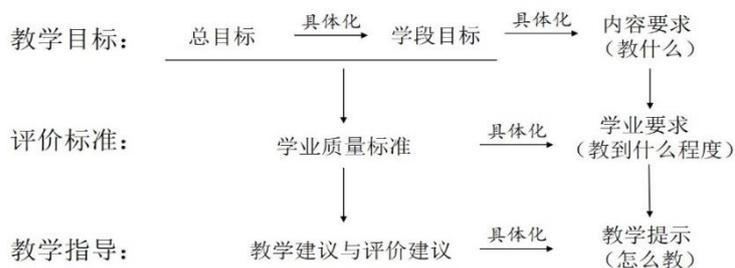


图 4

要以数学核心素养的测评为导向，以学业质量标准为依据，建立目标多元、方式多样、重视过程、促进人人发展的评价体系。《数学课标（2022 年版）》还对学业水平考试（中考）提出了命题建议：（1）在纸笔测试中，要合理设计客观题与主观题的比例，原则上客观题分值要低于主观题分值；主观题要探索命题问题解决及多学科融合类试题。（2）适当精减题量，

要着重减少单纯考查技能熟练性的题目，保证学生有充足的作答时间。（3）避免试题命制套路化倾向，减少机械刷题等不良现象的发生。

参考文献

[1] [3][4][5][6][7][8][9]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准（2022年版）[S].北京：北京师范大学出版社，2022:84,85,85,29,164,166,77,88.

[2]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准（2011年版）[S].北京：北京师范大学出版社，2011.